一阶微分方程：

一、可分离变量：

1. 定义：$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ 或 $P(x)G(y)+M(x)N(y)=0$
2. 解法：$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y) \Rightarrow \int\frac{dy}{g(y)}=\int f(x)dx$　注：$\frac{dy}{g(y)}$ 默认 $g(y)\neq0$，可能会丢部分"奇解"

如何理解"奇解"？

例1：求 $\sqrt{1-x^2}\,y'=\sqrt{1-y^2}$ 通解

Sol：$\sqrt{1-x^2}\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{1-y^2}\,\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$　是 $\frac{dy}{dx}=f(x)g(y)$ 形

∴ $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \int\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$，即 $\arcsin y=\arcsin x+C$ 为所求通解

接下来我们讨论"奇解"，不难发现，当 $y=\pm1$，方程也成立。此为奇解.

二、齐次方程：

1. 定义：形如 $\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})$ 的方程
2. 解法：令 $u=\frac{y}{x}$，则 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$（推：$y=ux$，$y'=u'x+ux'$）转化为 $\frac{du}{g(u)-u}=\frac{dx}{x}$

例2：$x^2y\cdot y'+x^3=y^3$ 的类型是？

Sol：识别：该方程是一个齐次方程。 $\Longrightarrow$ Tips：对于齐次方程，除 y' 外含 x,y 项次数相同

例3：微分方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}-\frac{1}{2}(\frac{y}{x})^3$ 满足 $y|_{x=1}=1$ 的特解为

Sol：令 $u=\frac{y}{x} \Rightarrow \frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}=u-\frac{1}{2}u^3$

$\Rightarrow \int\frac{-2du}{u^3}=\int\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{1}{u^2}=\ln|x|+C$　由于 $x=1$ 时 $y=1$，默认 $x>0$，可去绝对值

代入 $x=1$，$u=\frac{y}{x}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}=1$　代入得 $C=1$　∴ $\frac{x^2}{y^2}=\ln x+1$　即 $y=\frac{x}{\sqrt{\ln x+1}}$

三、一阶线性微分方程

1. 定义：$y'+P(x)y=q(x)$，当 $q(x)$ 恒等于0称"齐次"，否则为非"齐次"
2. 通解公式：$y=e^{-\int p(x)dx}\left[\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx+C\right]$　前提：转成上面的标准式
3. 应用场景："变化率"型

例4：设某曲线 $y=f(x)$ 过点 $(1,1)$，它的切线纵截距等于切点横坐标，求 $f(x)$.

Sol、我们将切线上的点记作 (X,Y)，曲线上的为 (x,y)

$Y-y=y'\cdot(X-x)$，令 $X=0 \Rightarrow Y=y-xy'=x$

即：$y'-\frac{1}{x}y=-1$　$P(x)=-\frac{1}{x}$　$q(x)=-1$

通解：$y=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left(\int(-1)e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right)$

二阶微分方程：

一、可降阶型微分方程：

1. 定义："缺一门"不含 x 或 y $\begin{cases} 1.a：y''=f(x,y')\text{型，不含}y \\ 1.b：y''=f(y,y')\text{型，不含}x \end{cases}$

2. 解法：

2.a：令 $p(x)=y'$，则 $y''=f(x,y')$，方程转化为 $p'=f(x,p)$。解出 $p=\varphi(x,C_1)$

可推出 $y_p=\int\varphi(x,C_1)dx+C_2$

2.b：令 $p(y)=y'$，则 $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx}=p\frac{dp}{dy}$，方程转化为 $p\frac{dp}{dy}=f(y,p)$

解出 $p=\varphi(y,C_1)$，分离变量积分 $\int\frac{dy}{p}=x+C_2$

例1：求 $xy''+3y'=0$ 的通解

Sol：令 $y'=p(x)$，$y''=p'(x)$，有 $xp'(x)+3p(x)=0 \Longrightarrow p'(x)+\frac{3}{x}p(x)=0$

不难发现转换成关于 $p(x)$ 的一阶方程 $p(x)=C_1e^{-\int\frac{3}{x}dx}=\frac{C_1}{x^3}$

$y'=\frac{C_1}{x^3}$，左右同时积分：$y=\int C_1x^{-3}dx=C_1x^{-2}+C_2$

例2：求 $yy''+y'^2=0$，$y(0)=1$，$y'(0)=\frac{1}{2}$，求特解

Sol：令 $y'=p(y)$，$y''=p\frac{dp}{dy}$，则有 $yp\frac{dp}{dy}+p^2=0 \Longrightarrow p(y\frac{dp}{dy}+p)=0$

当 $p=0$，与题设 $y'(0)=\frac{1}{2}$ 相矛盾 $\Rightarrow p\neq0$，$y\frac{dp}{dy}+p=0 \Rightarrow \frac{dp}{p}=-\frac{dy}{y}$

对该式左右两侧积分：$\ln|p|=-\ln|y|+C_1 \Rightarrow p=\frac{C_2}{y}$

代入 $x=0$，$y=1$　$p=y'=\frac{1}{2}=\frac{C_2}{1} \Rightarrow C_2=\frac{1}{2}$　$p=\frac{1}{2y}$

$p=y'=\frac{dy}{dx}=\frac{1}{2y} \Rightarrow 2ydy=dx$　$\int2ydy=\int dx \Rightarrow y^2=x+C$　$y=\sqrt{x+C}$

$y(0)=1 \Rightarrow C=1$　$\therefore y=\sqrt{x+1}$

二、二阶常系数线性微分方程：

1. 定义：$y''+py'+qy=C$　C 可以是一个常数，也可以是关于 x 的函数

$C=0$ 时称为"齐次"，$C\neq0$ 时称为"非齐次"

2. 解法：

2.a：特征法，由 $y''+py'+qy=0$ 写出特征方程 $\lambda^2+p\lambda+q=0$，解出特征根

① $\lambda_1\neq\lambda_2$，则 $y_p=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}$

② $\lambda_1=\lambda_2$，则 $y_p=(C_1+C_2x)e^{\lambda x}$

③ $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$，则 $y_p=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

例1：求 $y''-y'+\frac{1}{4}y=0$ 的通解：

Sol：写出特征方程 $\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}=0 \Rightarrow$ 解得 $\lambda_1=\lambda_2=\frac{1}{2}$

$\therefore y_p=(C_1+C_2x)e^{\frac{1}{2}x}$

例2：求 $y''-2y'+5y=0$ 的通解：

Sol：写出特征方程 $\lambda^2-2\lambda+5=0 \Rightarrow$ 解得 $\lambda_{1,2}=1\pm 2i$

$\therefore y_p=e^{x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)$

2.b：叠加法，非齐次通解＝齐次通解＋非齐次特解

若C是形如 $P_m(x)e^{rx}$（$P_m(x)$ 是一个关于x的多项式），记特解 y^* 为：

$y^*=x^kQ_m(x)e^{rx}$，其中 $Q_m(x)$ 是 $P_m(x)$ 待定系数式，K是特征方程的根重数

· 如果 $r\neq\lambda_1$，$r\neq\lambda_2$，则 $k=0$

如果 $r=\lambda_1$ 且 $r\neq\lambda_2$ 或 $r=\lambda_2$ 且 $r\neq\lambda_1$，则 $k=1$

如果 $r=\lambda_1=\lambda_2$，则 $k=2$.

若C是形如 $e^{\alpha x}[P_l(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x]$，记特解 y^* 为：

$y^*=x^ke^{\alpha x}[M_n(x)\cos\beta x+N_n(x)\sin\beta x]$ $n=\max\{l,m\}$

其中 $P_l(x)$ 与 $Q_m(x)$ 是x的l与m项式，而k在 $\alpha\pm\beta i$ 为特征根时为1，否则为0

拉氏变换：

1. 定义
2. 公式表常拉式变换
3. 逆变换：$\mathcal{L}^{-1}\{aF(s)+bG(s)\} = a\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} + b\mathcal{L}^{-1}\{G(s)\}$
4. 阶越函数：$u(t)$
5. 解初值问题(IVP)：$\mathcal{L}\{y'\} = sY(s) - y(0)$　　$\mathcal{L}\{y''\} = s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)$
6. 非常系数的IVP问题：有 $\lim_{s\to\infty} F(s) = 0$